

Support de cours

Cours:

PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet)

Vidéo:

A10 - Système de masse variable et référentiels accélérés

Concepts (extraits des sous-titres générés automatiquement) :

Capteur de force. Système de masse variable. Poids apparent. Poids apparent d'une chaînette. Vitesse de norme constante. Produit de la masse de la chaînette. Cours du temps. Temps de chute grand. Angle θ . Sinus de θ fois. Débit de masse positif. Mouvement de chute libre. Force extérieure. Temps t . R chapeau.



[vers la recherche de séquences vidéo](#)

(dans PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet).)



[vers la vidéo](#)

Center for Digital Education. Plus de matériel de soutien pédagogique ici :

<https://www.epfl.ch/education/educational-initiatives/cede/educational-technologies-gallery/boocs-en/>

Applications - Chapitre 10

Système de masse variable et référentiels accélérés

EPFL

Dr. Sylvain Bréchet

A.10 - Système de masse variable et référentiels accélérés

1 / 15

...

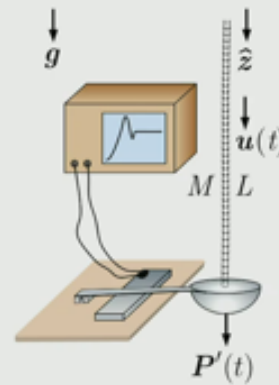
notes

résumé

0m 0s



- Une chaînette de masse M et de longueur L tombe en chute libre à vitesse $u(t) = gt \hat{z}$ dans un réceptacle relié à un capteur de force durant un temps de chute T .
- Le capteur de force mesure la force résultante $P'(t) = m(t) a(t)$ correspondant au poids apparent de la chaînette.
- Le poids apparent $P'(t)$ de la chaînette est la somme du poids réel $P(t) = m(t)g$ dans le réceptacle et de la poussée due au débit de masse $\dot{m}(t) > 0$ entrant à vitesse $u(t)$.



- Chaînette homogène : densité linéique constante

$$\rho_L = \frac{dm}{dz} = \frac{M}{L} = c \quad \text{(A.10.23)}$$

- Débit de masse : densité linéique constante et vitesse linéaire $\dot{z} = gt$

$$\dot{m}(z) \quad \text{(A.10.24)}$$

Voilà, on va maintenant discuter des applications de cours de ce 10^{ème} chapitre. Alors comme on a parlé de système de masse variable, on va prendre un exemple avec un système de masse variable. C'est une chaînette qui tombe dans un réceptacle. Et ce qu'on va mesurer ensemble, est ce qu'on va modéliser ? D'abord, c'est le poids apparent. On fera le modèle physique et mathématique, on va voir ce que ça donne et on fera l'expérience pour voir la similarité ou plutôt les déviations qu'on va avoir par rapport au modèle dans le niveau de la réalité expérimentale. Et puis le deuxième exemple qu'on va prendre, c'est celui d'un pendule dans un train. Sauf que maintenant on va compliquer un peu la donne. Le train se déplace à vitesse de norme constante sur une trajectoire circulaire, et là, on veut trouver l'angle d'inclinaison. Alors intuitivement, on peut déjà deviner un peu ce que ça va donner. Pourquoi ? Parce que quand on a vu un train qui se déplaçait en ligne droite, lorsqu'il accélère, le pendule revient en arrière. Lorsqu'il freine, il part en avant. Alors maintenant, si le train tourne, il a une accélération centripète. Donc on va voir un angle d'inclinaison dans la direction opposée. C'est à dire radialement vers l'extérieur, qu'on tourne dans un sens ou dans le sens opposé. C'est ce qu'on va trouver. D'accord, mais je vous propose qu'on commence d'abord par le deuxième problème qui apparaît dans la liste, qui est le poids apparent d'une chaînette qui tombe, qui est à la page onze. Voilà donc la chaînette. Elle est ici. Le réceptacle, il est là. Et ce qu'on va mesurer, c'est le poids apparent qui est la somme du poids réel lié à la masse de la chaînette qui se trouve dans le réceptacle. D'accord. Et qui va augmenter au cours du temps dû à la chute libre de cette chaînette. Et

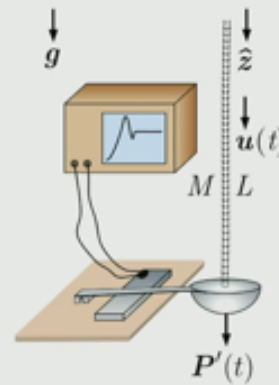
notes

résumé

0m 1s



- Une chaînette de masse M et de longueur L tombe en chute libre à vitesse $u(t) = gt \hat{z}$ dans un réceptacle relié à un capteur de force durant un temps de chute T .
- Le capteur de force mesure la force résultante $P'(t) = m(t) a(t)$ correspondant au poids apparent de la chaînette.
- Le poids apparent $P'(t)$ de la chaînette est la somme du poids réel $P(t) = m(t)g$ dans le réceptacle et de la poussée due au débit de masse $\dot{m}(t) > 0$ entrant à vitesse $u(t)$.



- Chaînette homogène : densité linéique constante

$$\rho_L = \frac{dm}{dz} = \frac{M}{L} = c \text{ s/c} \quad (\text{A.10.23})$$

- Débit de masse : densité linéique constante et vitesse linéaire $\dot{z} = gt$

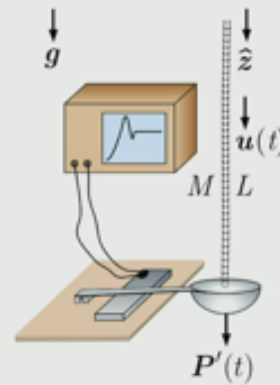
$$\dot{m}(z) \quad (\text{A.10.24})$$

ce qui va s'y ajouter. Comme il y a un débit de masse positif, c'est le contraire de la fusée. On a la chaînette qui rentre dans le réceptacle, on aura un débit de masse positif, on aura une poussée qui sera positive dans le réceptacle, qui va donc être orienté vers le bas et qui va s'ajouter au poids réel pour créer le poids apparent. Et on verra que la poussée dans ce cas, quand on lâche la chaînette et qu'on la laisse tomber avec un mouvement de chute libre, la poussée c'est deux fois le poids. Si on l'accompagnait à vitesse constante, la poussée serait égale au poids du corps. Alors dans le livre D'ansermet, ça a été fait à vitesse constante. Dans l'expérience que je vais vous montrer, c'est fait à accélération constante, c'est un petit peu plus compliqué, plus intéressant aussi. Donc c'est ce qu'on va traiter ensemble. D'accord. Donc il faut imaginer une chaînette de longueur L . Pour simplifier, on suppose que le premier maillon, il est juste en contact avec le réceptacle, mais il n'est pas encore tombé dans le réceptacle. D'accord. Alors cette chaînette au temps initial. On la lâche. Elle a un mouvement de chute libre, elle tombe dans le réceptacle. Pour simplifier la modélisation, on va considérer qu'elle est uniforme. Dans la pratique, c'est pas vrai, il y a des petits maillons. D'accord. Donc on va supposer que c'est parfaitement uniforme, ce qui va permettre en fait de définir une densité linéique. On va y venir. D'accord. Ensuite, on a un capteur de force qui va mesurer le poids apparent dans le réceptacle. Ce poids apparent qui est la somme de la poussée et du poids réel. Alors vous avez déjà la forme de la solution qu'on va expliquer dans quelques instants. Donc le capteur de force mesure ce poids apparent qui va se traduire, comme on va le voir,

notes

résumé

- Une chaînette de masse M et de longueur L tombe en chute libre à vitesse $\mathbf{u}(t) = gt \hat{\mathbf{z}}$ dans un réceptacle relié à un capteur de force durant un temps de chute T .
- Le capteur de force mesure la force résultante $\mathbf{P}'(t) = m(t) \mathbf{a}(t)$ correspondant au poids apparent de la chaînette.
- Le poids apparent $\mathbf{P}'(t)$ de la chaînette est la somme du poids réel $\mathbf{P}(t) = m(t) \mathbf{g}$ dans le réceptacle et de la poussée due au débit de masse $\dot{m}(t) > 0$ entrant à vitesse $\mathbf{u}(t)$.



- Chaînette homogène : densité linéique constante

$$\rho_L = \frac{dm}{dz} = \frac{M}{L} = c \quad \text{(A.10.23)}$$

- Débit de masse : densité linéique constante et vitesse linéaire $\dot{\mathbf{z}} = gt$

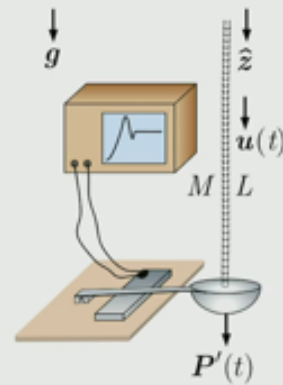
$$\dot{m}(z) \quad \text{(A.10.24)}$$

par le produit de la masse de la chaînette, fois l'accélération que celle-ci subit. D'accord. Et le poids réel est la masse au temps T multipliée par le champ gravitationnel. La chaînette est à un vecteur vitesse $\mathbf{u}$. Tous les points ont le même vecteur vitesse. On les lâche tous en même temps à vitesse nulle. D'accord. Donc ils ont la même accélération. La vitesse va croître linéairement au cours du temps, l'accélération étant constante. Si on intègre, on a une vitesse qui augmente linéairement au cours du temps. Donc la première chose à faire, c'est d'écrire que la densité linéique, c'est à dire la masse par unité de longueur, est une constante. Cette densité linéaire que l'on va appeler ρ_L d'accord ρ_L la densité linéaire de la chaîne, c'est quoi ? Et bien c'est le rapport de la masse d'un élément de taille infinitésimale de cette chaînette DM divisé par la longueur infinitésimale le long d'un axe vertical le long de l'axe z dz . Par ailleurs, pour décrire ce problème où la chaînette tombe, on va prendre un axe vertical qui est orienté vers le bas. D'accord. Comme la chaînette est homogène, si on prend un petit élément de longueur infinitésimale, qu'on divise sa masse par sa longueur, on aura le même résultat que si on prend l'ensemble de la chaîne, on prend sa masse et qu'on la divise par la longueur totale qui est le rapport de M sur elle. D'accord. Ça, c'est une constante. Bon, ce qu'on peut mesurer facilement, c'est le temps de chute. D'accord. On va exprimer le résultat en termes du temps de chute. Mais ça, ça viendra plus tard. On a besoin de la poussée. Dans la poussée, il y a le débit de masse qui est la dérivée temporelle de la masse. Donc calculons le débit de masse. On sait aussi que la masse va dépendre de la coordonnée z de

notes

résumé

- Une chaînette de masse M et de longueur L tombe en chute libre à vitesse $\mathbf{u}(t) = gt \hat{\mathbf{z}}$ dans un réceptacle relié à un capteur de force durant un temps de chute T .
- Le capteur de force mesure la force résultante $\mathbf{P}'(t) = m(t) \mathbf{a}(t)$ correspondant au poids apparent de la chaînette.
- Le poids apparent $\mathbf{P}'(t)$ de la chaînette est la somme du poids réel $\mathbf{P}(t) = m(t) \mathbf{g}$ dans le réceptacle et de la poussée due au débit de masse $\dot{m}(t) > 0$ entrant à vitesse $\mathbf{u}(t)$.



- Chaînette homogène : densité linéique constante

$$\rho_L = \frac{dm}{dz} = \frac{M}{L} = \text{cte} \quad (\text{A.10.23})$$

- Débit de masse : densité linéique constante et vitesse linéaire $\dot{z} = gt$

$$\dot{m}(z) \quad (\text{A.10.24})$$

l'extrémité supérieure de notre chaînette.

notes

résumé

- Débit de masse :

$$\dot{m}(t) = \frac{M}{L} g t \quad (A.10.24)$$

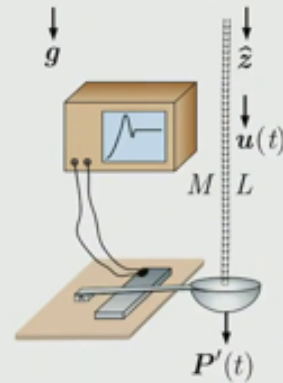
- Temps de chute : extrémité supérieure

$$(A.10.25)$$

- Débit de masse : (A.10.24) et (A.10.25)

$$(A.10.26)$$

- Masse : $m(0) = 0$ et $m(T) = M$ (A.10.27)



Donc on a un point où M et M Point, bien sûr, est une fonction de Z qui dépend évidemment du temps. D'accord. Donc on a une composition de fonction du temps. On va dériver la masse par rapport à Z et dériver Z par rapport au temps. Donc on a la dérivée externe qui est la dérivée de la masse par rapport à la longueur z , la dérivée interne qui est z . Maintenant dm sur dz , c'est le rapport de la masse totale de la chaînette divisée par sa longueur. On aura donc M sur L x point z point. On le connaît. Pourquoi ? Parce que on sait que z point, point. L'accélération, c'est celle du champ gravitationnel. C'est g . On intègre par rapport au temps. On trouve donc gt pour la vitesse. Ok, c'est pas mal. On a déjà une expression du débit de masse. C'est un. C'est un bon début. On doit encore remettre tout ceci en forme pour obtenir le résultat que l'on souhaite.

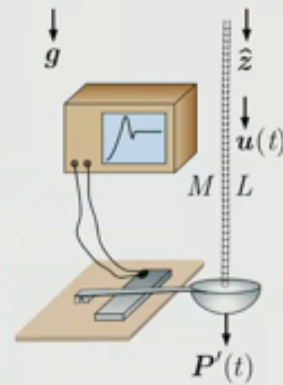
notes

résumé

5m 25s



- Une chaînette de masse M et de longueur L tombe en chute libre à vitesse $\mathbf{u}(t) = gt \hat{\mathbf{z}}$ dans un réceptacle relié à un capteur de force durant un temps de chute T .
- Le capteur de force mesure la force résultante $\mathbf{P}'(t) = m(t) \mathbf{a}(t)$ correspondant au poids apparent de la chaînette.
- Le poids apparent $\mathbf{P}'(t)$ de la chaînette est la somme du poids réel $\mathbf{P}(t) = m(t) \mathbf{g}$ dans le réceptacle et de la poussée due au débit de masse $\dot{m}(t) > 0$ entrant à vitesse $\mathbf{u}(t)$.



- Chaînette homogène : densité linéique constante

$$\rho_L = \frac{dm}{dz} = \frac{M}{L} = c \text{ s/c} \quad (\text{A.10.23})$$

- Débit de masse : densité linéique constante et vitesse linéaire $\dot{z} = gt$

$$\dot{m}(z(t)) = \frac{dm}{dz} \dot{z} = \frac{M}{L} gt \quad (\text{A.10.24})$$

Alors ce qu'on va faire maintenant, c'est simplement de la balistique. D'accord. L'extrémité supérieure de la chaînette tombe avec un mouvement de chute libre. Ce qui veut dire que si on applique les équations de la balistique, et bien la hauteur de chute va correspondre. Étant donné que le haut de la chaînette est initialement au repos, ce sera donc une demi de g fois le temps de chute grand T élevé au carré. Oui. Ah oui, Merci.

notes

résumé

6m 16s



- Débit de masse :

$$\dot{m}(t) = \frac{M}{L} g t \quad (A.10.24)$$

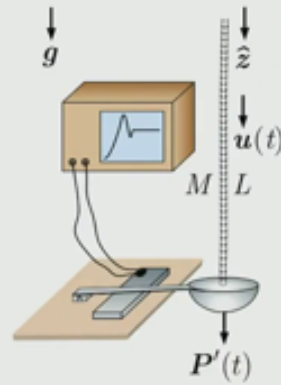
- Temps de chute : extrémité supérieure

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g T^2 \quad (A.10.25)$$

- Débit de masse : (A.10.24) et (A.10.25)

$$(A.10.26)$$

- Masse : $m(0) = 0$ et $m(T) = M$ (A.10.27)



Ah ! J'ai frisé le mauvais. Voilà. Attendez donc ! Voilà. Hop !

notes

résumé

6m 45s



- Loi du mouvement : masse variable (A.10.28)

- Force extérieure : poids réel (A.10.29)

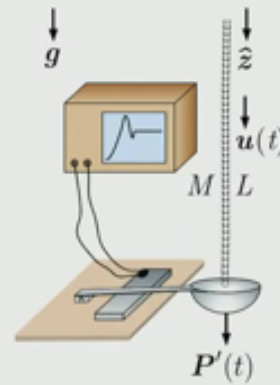
- Poussée : (A.10.30)

- Poids apparent :

(A.10.31)

- Poids apparent : projection selon l'axe vertical

(A.10.32)



Tout va bien. Donc maintenant, on peut inverser cette relation pour en tirer le taux de chute exprimé en fonction de L qui est de l sur G dont on prend la racine carrée. D'accord. Le débit de masse, on va l'exprimer en termes du temps de chute. On comprend l'expression qui est là. Et puis on remplace l par une demi de $g t$ carré. Elle est au dénominateur. On va se retrouver avec un débit de masse M qui est une fonction du temps qui sera deux fois la masse totale divisée par le temps de chute au carré multiplié par le temps auquel on mesure le débit. D'accord. Donc on voit déjà que ce débit de masse croît linéairement au cours du temps. D'accord. Ce qui est assez logique puisque la vitesse croît elle aussi linéairement et qu'on est en train de parler. Si vous voulez de la vitesse, car un maillon de la chaîne, au moment où il touche le réceptacle, tous les maillons se déplacent à la même vitesse. D'accord. Vitesse qui va croître linéairement au cours du temps. Il est logique que le débit de masse croisse lui aussi linéairement au cours du temps. La condition initiale, c'est que la chaînette est en contact avec le réceptacle, mais il n'y a aucun élément de la chaînette qui se trouve dans le réceptacle au temps T égal zéro. Ce qui veut dire que la masse au temps initial est nulle. On sait aussi qu'après le temps de chute, l'ensemble de la chaînette se trouve dans le réceptacle. Donc la masse au temps T , au temps de chute, c'est la masse totale M de notre chaînette. Donc maintenant on va pouvoir intégrer par rapport au temps le débit de masse pour trouver la fonction qui nous donne la masse au cours du temps. La masse de la chaînette qui se trouve dans le réceptacle. Alors on

notes

résumé

6m 52s



- Loi du mouvement : masse variable (A.10.28)

- Force extérieure : poids réel (A.10.29)

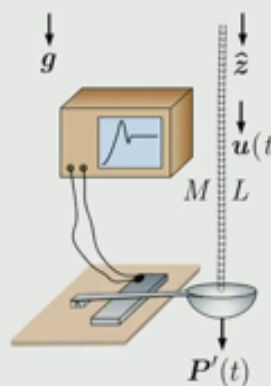
- Poussée : (A.10.30)

- Poids apparent :

(A.10.31)

- Poids apparent : projection selon l'axe vertical

(A.10.32)



va sommer les variations infinitésimales de la masse qui sont des fonctions du temps. Ceci donne la valeur initiale de la masse m de zéro à la valeur au temps t qui est m de T . Et puis on va profiter de réécrire la variation infinitésimale de la masse comme étant le produit du débit de masse multiplié par l'intervalle de temps infinitésimale qu'on intègre de zéro jusqu'à T . Or, le débit de masse, on le connaît. On sait que la fraction contient uniquement des grandeurs constantes. Deux grands thèmes sur grand t au carré qu'on va pouvoir mettre en évidence. On aura donc deux grands thèmes sur Grand T au carré qui multiplie l'intégrale de T . Prime de T prime qu'on évalue entre zéro et T . Alors la primitive de t prime, c'est une demi de t prime au carré. On se retrouve bien évidemment avec un facteur, une demi qui simplifie le facteur deux. Il nous reste un grand thème sur T carré le toutefois t élevé au carré. Donc, si le débit de masse croît linéairement au cours du temps, la masse qu'on réintègre par rapport le débit de masse qu'on réintègre par rapport au temps pour trouver la masse fait que la masse, elle, va croître quadratiquement au cours du temps. D'accord.

notes

résumé

- Loi du mouvement : masse variable (A.10.28)

$$\vec{F}^{\text{ext}}(t) + \dot{m}(t) \vec{u}(t) = m(t) \vec{a}(t) -$$

- Force extérieure : poids réel (A.10.29)

$$\vec{F}^{\text{ext}}(t) = \vec{P}(t)$$

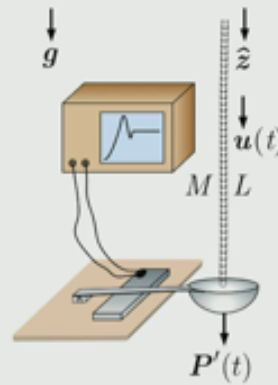
- Poussée : (A.10.30)

- Poids apparent :

$$(A.10.31)$$

- Poids apparent : projection selon l'axe vertical

$$(A.10.32)$$



Alors maintenant, il faut qu'on utilise l'équation du mouvement quelque part. C'est ce qu'on va faire maintenant. On va écrire que la force extérieure, parce qu'il y en aura qu'une seule, ce sera le poids au temps T, plus une force supplémentaire qui est la poussée, qui est le débit de masse qui est ici, contrairement à la fusée est positif M de T fois le vecteur vitesse relative $u^2 t$. D'accord. Qui est orienté vers le bas ? D'accord. Est égal au produit de la masse au temps T fois l'accélération au temps t. Alors en réalité, la force extérieure, on va l'écrire, c'est le poids. Ce poids qui évolue au cours du temps. Ok. Et donc si on voit Si on tient compte du fait que cette force extérieure, dans notre modèle où on néglige le frottement, apparaît dans l'équation du mouvement. On peut maintenant réinterpréter la somme du poids réel et de la poussée comme étant le poids apparent.

notes

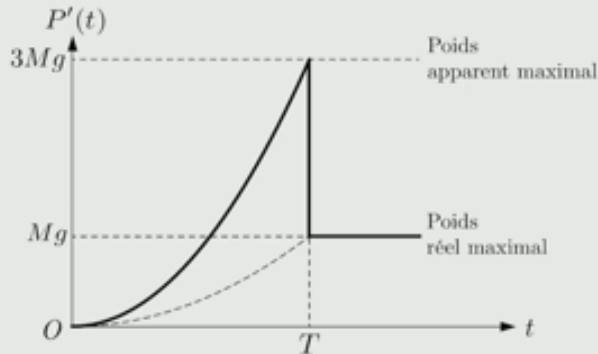
résumé

9m 50s



- Poids apparent durant la chute : $0 < t < T$

$$P'(t) = \underbrace{\frac{Mg}{T^2} t^2}_{\text{poids réel}} + \underbrace{\frac{2Mg}{T^2} t^2}_{\text{poussée}} \quad (\text{A.10.32})$$



Dr. Sylvain Bréchet

A.10. Système de masse variable et référentiels accélérés

15 / 15

Donc ceci, c'est égal au poids apparent de la chaînette au temps T, c'est celui qu'on va mesurer avec le capteur de force. Donc le poids réel, lui, c'est le produit de la masse au temps T fois g. Comme la masse au temps T, on la connaît que g est orientée vers le bas, c'est g, x z. Chapeau pour écrire ceci comme grand M sur grand carré x petit t carré qui multiplie g fois z chapeau. Ok. Alors là, vous voyez la forme du poids. Regardez maintenant la forme de la poussée. La poussée, c'est le débit de masse multipliée par la vitesse U2, T. d'accord ? La vitesse à laquelle ce débit a lieu. Alors le débit de masse, on le connaît. Ces deux grands thèmes sur tes carrés fois t qu'on va multiplier par u2, t. Je vous rappelle qu'on a un mouvement de chute libre, donc une norme C, gt, x Z. Chapeau. Maintenant, si vous comparez ces deux équations, qu'est ce que vous constatez ? Il y a un facteur deux. D'accord ? Il y a un facteur deux qui se cache ici dans la poussée. Ce qui veut dire que lorsque la chaîne tombe dans le réceptacle, la poussée est deux fois plus grande que le poids réel. Et lorsqu'on mesure le poids apparent, qui est la somme des deux, on a un résultat qui est trois fois égal au poids réel. Donc le poids apparent ici déprime de T. C'est le poids réel qui est le produit de la masse fois j'ai plus la poussée qui est m de T. Débit de masse multipliée par la vitesse. D'accord. Donc maintenant, si on fait une projection selon l'axe vertical, on aura pour la norme. Alors c'est une projection pour la norme du poids apparent au temps T. On aura la contribution liée au poids réel qui est M sur grand et carré, fois

notes

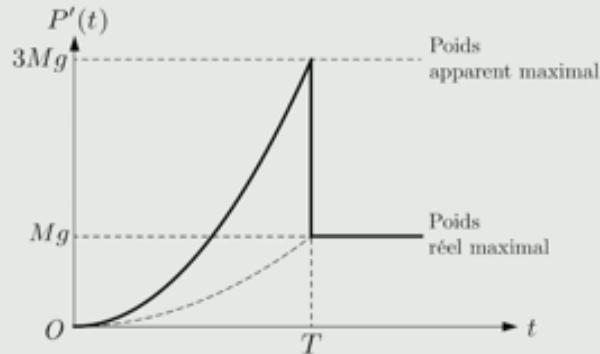
résumé

10m 58s



- Poids apparent durant la chute : $0 < t < T$

$$P'(t) = \underbrace{\frac{Mg}{T^2} t^2}_{\text{poids réel}} + \underbrace{\frac{2Mg}{T^2} t^2}_{\text{poussée}} \quad (\text{A.10.32})$$



Dr. Sylvain Bréchet

A.10 - Système de masse variable et référentiels accélérés

15 / 15

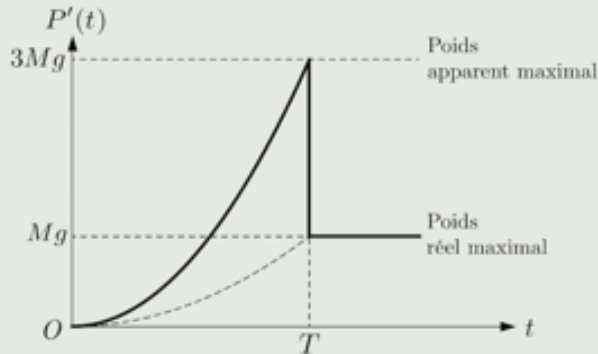
petite et carrée, le tout fois G. D'accord. Plus la contribution liée à la poussée qui est deux grands thèmes sur T carré le Toutefois petit t. Oui, c'est ça, multiplié par GT. Le deuxième terme est deux fois égal au premier, donc on aura trois fois le poids réel. Soit troisième grand G sur grand et carré, fois petit et carré. D'accord. Bon alors concrètement, si on représente ça graphiquement, ça donne quoi ? Ça donne la chose suivante. On a ici un graphique qui nous donne le poids par an, qui nous donne le poids par apparent en fonction du temps. D'accord, le débit de masse croît linéairement, la masse croît de manière quadratique. Et bien le poids qui dépend de la masse va croître de manière quadratique. Le voilà. Ok, mais en fait ça ne fait pas le poids. C'est le poids apparent. Le poids réel, il est là. D'accord. Le poids réel, il va atteindre un maximum qui est évidemment le poids de l'ensemble de la chaînette, qui est le produit de sa masse par le champ gravitationnel. Et on voit que la poussée à chaque instant est le double du poids réel. Donc on va atteindre un pic un maximum du poids apparent lu par la balance qui va représenter trois fois le poids réel. Une fois que toute la masse est tombée dans le réceptacle, la poussée s'arrête et donc il y a une discontinuité brutale où le poids apparent passe de ce maximum qui est trois mg à la valeur réelle qui est mg. Ce qui donne une courbe qui ressemble un petit peu à un encéphalogramme d'accord ou un potentiel d'action en biologie avec ce pic. Et puis on retombe. On retombe sur une valeur constante. D'accord. Alors maintenant, on va faire l'expérience. On va mesurer le poids apparent et on va le représenter graphiquement. Donc on va faire ceci ici grâce

notes

résumé

- Poids apparent durant la chute : $0 < t < T$

$$P'(t) = \underbrace{\frac{Mg}{T^2} t^2}_{\text{poids réel}} + \underbrace{\frac{2Mg}{T^2} t^2}_{\text{poussée}} \quad (\text{A.10.32})$$



Dr. Sylvain Bréchet

A.10 - Système de masse variable et référentiels accélérés

15 / 15

à l'ordinateur qui est là. Je vais lancer l'acquisition. Je vais ensuite lâcher la partie supérieure de la chaînette qui va tomber dans le réceptacle qui est ici. Et ce que vous allez voir selon l'axe vertical, c'est le poids apparent en fonction du temps. Vous allez voir qu'on va vers un pic et que ce pic est trois fois égal à la valeur constante que l'on va voir à la fin qui va être le poids réel. Ok, alors lançons la manip. Là, je vais détacher la partie supérieure. Voilà la courbe. Ok, vous voyez le maximum qui apparaît là bas avec un retour vers une valeur constante qui est le poids réel ? Alors, quelle est la différence avec la théorie ? La différence, c'est essentiellement le fait qu'on a une vraie chaînette. Il y a des maillons, c'est pas homogène. Donc il y a des moments où il y a plus de masse, des moments où il y a moins de masse, d'accord. Et il y a des petits à-coups dus au fait que les petits éléments de chaînette vont se déposer sur le bas du réceptacle. Et donc ceci donne des petites bosses que vous voyez ici. Ensuite, à la fin, quand toute la chaînette est tombée, il y a un effet de rebond lié à la chaînette que vous voyez par la petite bosse qui s'amorce après 0,5 secondes. D'accord. Et on tend vers une valeur constante qui représente le poids réel de la chaînette.

notes

résumé

A.10.1 Pendule sur train en mouvement circulaire

A.10.2 Poids apparent d'une chaînette qui tombe

D'accord. Oui. Alors là oui, exactement le poids par an du à la poussée. Donc ça va être la somme du poids réel plus la poussée qui dans ce cas là est deux fois le poids réel. Ok, mais si on avait pris la chaînette ? On va essayer de faire une expérience. Elle n'est pas au catalogue. On va quand même tenter. On va la tenter. On va le faire. On va faire tomber la chaînette à la main à vitesse. Alors voilà, là, je l'ai arrêté. Ok. On va la faire tomber à peu près à vitesse constante. D'accord. Et là, le poids apparent va être égal à deux fois le poids réel. Et au lieu d'avoir une forme parabolique, on va avoir un profil linéaire. Alors comme je vais le faire à la main, ça ne va pas être génial comme qualité, mais c'est l'idée. D'accord, c'est pour vérifier un petit peu la théorie. Je n'ai jamais fait l'expérience. Donc on va tester. Peut être que ça sera foireux, mais on va quand même essayer. Donc je vais prendre l'extrémité supérieure de la chaînette. Et je vais la faire descendre de manière régulière. Dans le réceptacle. Ah bon ? Ce n'était pas concluant. C'était peut être trop long. Alors faisons le plus rapidement. Je vais resserrer un peu, resserrer là. Ah ! Ah oui, Oui, parce que c'est sur une seconde. Écoutez, je n'ai pas accès, Je n'ai pas accès à ces données. Il faudrait savoir comment c'est Paramétrisé, en fait. On va on va tenter, on va tenter un truc, on tente. Ouais, bon, ça passe. Ce n'était pas super concluant. Il faudrait PEUT-ÊTRE Effectivement, comme vous dites revoir la base de temps pour voir ça, Mais ce qu'on obtiendrait, je vous le montre, théoriquement, on atteindrait une valeur maximale qui est deux mg. D'accord. Et on aurait ce comportement là si on était assis,

notes

résumé

16m 25s



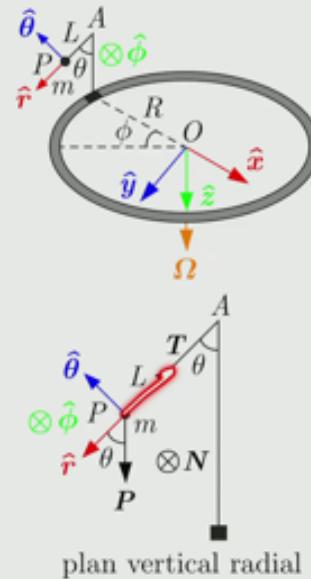
A.10.1 Pendule sur train en mouvement circulaire**A.10.2 Poids apparent d'une chaînette qui tombe**

si la chaîne tombait à vitesse constante. D'accord ? Bon.

notes

résumé

- Un pendule P de masse m et de longueur L est suspendu au plafond A d'un train en mouvement circulaire de rayon uniforme R à vitesse angulaire $\Omega = \Omega \hat{z} = \text{cste}$ dans le sens des aiguilles d'une montre.
- Un mécanisme assure que le pendule oscille dans le plan vertical radial orthogonal au mouvement contenant O et A .
- Soit ϕ l'angle azimutal dans le plan horizontal des rails et θ l'angle d'oscillation nodal dans le plan vertical radial.
- ❶ Référentiel absolu : rails
repère cartésien $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$
- ❷ Référentiel relatif : train
repère sphérique $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$



Dr. Sylvain Bréchet

A.10 - Système de masse variable et référentiels accélérés

4 / 15

Ceci étant dit, revenons sur le premier problème de la liste, qui est celui d'un pendule dans un train qui a un mouvement circulaire. Donc vous avez ici un train qui se déplace à vitesse de norme constante sur une voie ferrée circulaire. D'accord. Il tourne dans le sens trigonométrique. Donc, si vous prenez la paume de la main droite et que vous la faites tourner dans le sens trigonométrique, le pouce est orienté vers le bas. Le vecteur vitesse angulaire l'est aussi. D'accord. On peut introduire un repère cartésien avec un axe Z qui est orientée vers le bas, un axe X et un axe Y qui satisfont la règle de la main droite dans le plan. Ce qui nous intéresse, c'est le pendule qui est embarqué dans le train. Donc ce pendule est suspendu au plafond du train et il y a un dispositif, par exemple de plaque de verre qui contraignent le pendule à osciller dans la direction qui est orthogonale à la marche du train. Donc si vous voulez, dans le plan vertical qui contient l'origine O qui est ici au centre de la trajectoire circulaire, le point A et le point P , c'est dans un même plan vertical. Bon. Alors on aura besoin de coordonnées polaires, de coordonnées sphériques. Pourquoi ? Parce que le train a un mouvement de rotation sur une trajectoire circulaire. On va introduire l'angle ϕ dans le plan horizontal et on a également l'angle θ dans le plan vertical. D'accord. La distance qui sépare le pendule du point d'attache au plafond est constante. C'est la longueur du fil L . Ok, on a comme référentiel absolu les rails. On a un repère cartésien qui leur est associé avec le vecteur unitaire X , chapeau Y et Z Chapeau. Et pour le référentiel relatif du train, on va choisir un repère sphérique attaché au pendule dont les vecteurs unitaires sont. R Chapeau. T eta chapeau

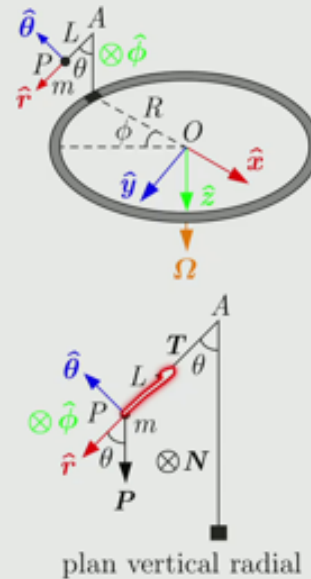
notes

résumé

18m 48s



- Un pendule P de masse m et de longueur L est suspendu au plafond A d'un train en mouvement circulaire de rayon uniforme R à vitesse angulaire $\Omega = \Omega \hat{z} = \text{cste}$ dans le sens des aiguilles d'une montre.
- Un mécanisme assure que le pendule oscille dans le plan vertical radial orthogonal au mouvement contenant O et A .
- Soit ϕ l'angle azimutal dans le plan horizontal des rails et θ l'angle d'oscillation nodal dans le plan vertical radial.
- ❶ Référentiel absolu : rails
repère cartésien $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$
- ❷ Référentiel relatif : train
repère sphérique $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$



et phi Chapeau. Ce matin, durant une pause, on m'a posé une question intéressante qui est de savoir mais combien est ce qu'on a de référentiel ? Combien est ce qu'on a de repère ? Eh bien, on peut prendre par exemple deux référentiels et autant de repères qu'on veut. On peut en avoir deux qui sont associés au même référentiel. C'est ce qu'on fera d'ailleurs la semaine prochaine lorsqu'on traitera du pendule de Foucault. C'est pour ça que c'est important de les distinguer. Il faut être au clair sur quels sont les référentiels, quels sont les repères. Là, on a pris un référentiel absolu, les voit. Un repère cartésien fixe par rapport au sol X Chapeau. Chapeau ! poser le chapeau, on a pris un repère, un référentiel relatif qui est le train. Un repère sphérique qu'on a attaché ici au point matériel P. Mais on aurait pu aussi prendre un repère cartésien attaché au point matériel A qui se déplace avec le train. C'est ce qu'on fera la semaine prochaine. Donc pour le pendule de Foucault. Alors, quelles sont les forces qui interviennent ? Les forces extérieures ? Il y en a trois. La première, c'est le poids. La deuxième, c'est la tension au long du fil.

notes

résumé

- Grandeurs cinématiques relatives :

- Position relative :

$$\mathbf{r}_r(P) = \quad (A.10.1)$$

- Vitesse relative :

$$\mathbf{v}_r(P) = \quad (A.10.2)$$

- Accélération relative :

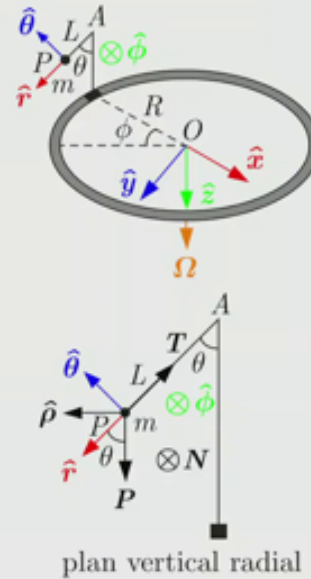
$$\mathbf{a}_r(P) = \quad (A.10.3)$$

- Vitesse angulaire :

$$\Omega = \quad (A.10.4)$$

- Accélération absolue : point A - MCU

$$\mathbf{a}_a(A) =$$



Et pour les mêmes raisons que ce matin, avec le pendule qui oscillait dans le plan de la porte, on contraint ici le pendule à osciller dans un plan qui est orthogonal au mouvement. Il y aura donc une force de réaction normale qui le contraint à rester dans ce plan. Le train se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre. D'accord. Ce qui fait que la force de réaction normale sera orientée dans le même sens. Alors on a choisi R. Chapeau le long du fil. Tête à chapeau vers le haut. D'après la règle de la main droite, on voit que le chapeau va rentrer dans le plan. Donc le chapeau est orienté selon fit Chapo.

notes

résumé

21m 49s



• Forces extérieures :

① Poids :

$$\mathbf{P} = \quad (A.10.5)$$

② Force de réaction normale :

$$\mathbf{N} = \quad (A.10.6)$$

③ Tension :

$$\mathbf{T} = \quad (A.10.7)$$



Dr. Sylvain Bréchet

A.10 - Système de masse variable et référentiels accélérés

6 / 15

Alors, comme ce matin avec le pendule dans le plan de la porte, il faut qu'on définisse les grandeurs cinématiques relatives. Commençons par la position relative. Le pendule a une longueur l . On aura donc comme vecteur position relative l fois $\hat{r}$ Chapeau. Il faut imaginer que vous êtes assis dans un wagon du train et vous voyez le pendule osciller. Vous ne voyez pas le train se déplacer, Vous voyez uniquement le pendule qui oscille dans ce plan vertical. Donc la vitesse relative, celle du pendule dans le plan, dans le train, et bien va avoir une seule composante le long de la trajectoire relative dans le plan d'oscillation. Dans le train, on aura une vitesse qui va être tangente à sa trajectoire qui est dans un plan vertical. C'est l fois $\dot{\theta}$ point $\hat{x}$, $\dot{\theta}$, chapeau. Il y aura deux termes d'accélération et non pas trois. On ne voit pas le train tourner. Ce qu'on voit, c'est le pendule qui oscille dans le plan et c'est tout. D'accord. Donc on va avoir une accélération centripète qui est un $l \dot{\theta}^2$ point $\hat{x}$, $\dot{\theta}^2$, chapeau, une accélération tangentielle tangente à la trajectoire relative dans le référentiel du train qui est $l \ddot{\theta}$ point $\hat{x}$, $\ddot{\theta}$, Chapeau. D'accord pour le vecteur vitesse angulaire qui est orienté vers le bas, on a sa norme qui est Ω fois le vecteur unitaire $\hat{z}$ chapeau. Le même que ce matin, c'est $\Omega \times \hat{z}$ chapeau qu'on projette dans le repère sphérique. C'est exactement la même chose que ce matin, c'est le cosinus de θ fois R chapeau moins le sinus de θ fois $\dot{\theta}$, chapeau. Bon alors il faut faire attention maintenant, c'est au point A, le point de suspension du pendule. Il est dans le plan du train, dans le référentiel du train. Pardon ? Et il est immobile par rapport à ce référentiel là. Oui, mais le train lui même

notes

résumé

22m 23s



• Forces extérieures :

① Poids :

$$\mathbf{P} = \quad (A.10.5)$$

② Force de réaction normale :

$$\mathbf{N} = \quad (A.10.6)$$

③ Tension :

$$\mathbf{T} = \quad (A.10.7)$$



a un mouvement de rotation à vitesse de norme constante, un mouvement circulaire uniforme le long des voies. Ce qui veut dire que le point A a lui aussi un mouvement absolu qui est un mouvement circulaire uniforme. Et donc, si vous avez un point matériel qui a un mouvement circulaire uniforme, la seule accélération qu'il va ressentir, c'est l'accélération centripète. C'est celle qui aura le point A. Le rayon, c'est le rayon de la trajectoire circulaire du train qui est grand. R ça sera donc moins grand R fois la vitesse angulaire au carré qui est ici $\dot{\phi}$ point au carré. Multiplié par quoi ? Par le vecteur unitaire. D'accord. Radiale horizontale qui est orientée vers l'extérieur. Qui est ici ce $\hat{r}$ au chapeau, au chapeau. On aimerait le réécrire en termes des vecteurs unitaires du repère sphérique. Donc on se place dans le plan vertical radial d'oscillation du pendule et on exprime $\mathbf{r}$ au chapeau en termes de r , $\hat{\phi}$ au chapeau et θ au chapeau et on va donc avoir moins R fois $\dot{\phi}$ point c oméga. On a un $\hat{r}$ Poincaré. On aura donc un Ω^2 qui multiplie le sinus de θ fois r au chapeau. Plus le cosinus de θ , fois θ au chapeau qu'on obtient en projetant $\mathbf{r}$ au chapeau. Selon R. $\hat{\phi}$ au chapeau et tête à chapeau. D'accord. Bon.

notes

résumé

- Forces d'inertie : $\dot{\Omega} = 0$

- ① Force inertielle :

$$F_i = -m a_a(A) = \quad (A.10.8)$$

- ② Force centrifuge :

$$\begin{aligned} F_c &= -m \Omega \times (\Omega \times r_r(P)) = \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned} \quad (A.10.9)$$

- ③ Force de Coriolis :

$$\begin{aligned} F_C &= -2m \Omega \times v_r(P) = \\ &= \end{aligned} \quad (A.10.10)$$

On doit maintenant exprimer les forces extérieures, le point, la force de réaction normale et la tension dans le repère. Dans le repère relatif. Donc pour le poids, on a mg fois le vecteur unitaire orienté vers le bas qui en coordonnées sphériques et le cosinus de θ fois r chapeau moins le sinus de θ , fois θ chapeau. N est orienté selon ϕ chapeau. L'attention est opposée à R . Chapeau. Elle est radialement orientée vers l'intérieur. C'est moins T fois r Chapeau. Bon, les forces extérieures, c'est simple, les forces d'inertie un petit peu moins. Alors maintenant, il faut qu'on détermine les forces d'inertie. Combien y a-t-il de forces d'inertie ? Il y en a trois. Le point A se déplace. Donc il y aura une force inertielle. Le train tourne. Il y aura une force centrifuge et il y aura une force de Coriolis. La rotation, heureusement, se fait à vitesse angulaire constante, parce que si elle se faisait à accélération constante, on aurait en plus une force de l'air. Je ne voulais pas compliquer le bateau, on aurait pu le faire et dans ce problème, on aurait retrouvé toutes les forces d'inertie. D'accord. On va pas le faire ici. Il faudrait simplement rajouter un terme de force de l'air qui apporte cela dit en passant, pas grand chose. D'accord. Donc calculons la force inertielle f_i qui est moins le produit de la masse fois l'accélération absolue du point A . On utilise le résultat qu'on vient d'obtenir. Le fait que le point $aa1$ mouvement circulaire uniforme par rapport au référentiel du sol, et donc on a une accélération centripète. On va avoir une force inertielle qui se comporte donc de facto

notes

résumé

25m 34s



• Forces extérieures :

① Poids :

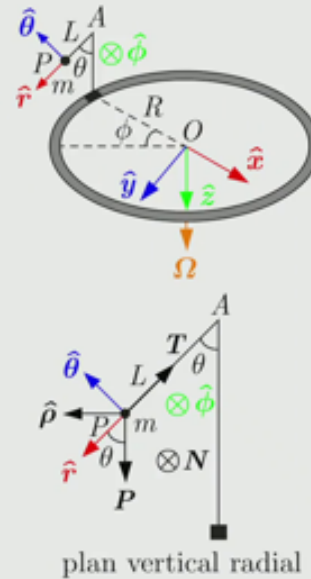
$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (\text{A.10.5})$$

② Force de réaction normale :

$$\mathbf{N} = N \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{A.10.6})$$

③ Tension :

$$\mathbf{T} = -T \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{A.10.7})$$



comme une force centrifuge. D'accord. C'est ce qu'on va voir dans un instant puisque si maintenant on fait la substitution, on trouve $m \times r \omega^2$ fois chapeau. C'est à dire $m r \omega^2$ qui multiplie le sinus de θ fois chapeau plus le cosinus de θ x θ Chapeau. Alors c'est là, par exemple, qu'il faut avoir un petit peu de sens physique, par exemple, pour être sûr que le calcul est juste. Qu'est ce qu'on sait ? Cette force inertielle doit être une force qui se comporte comme une force centrifuge. Pourquoi ? Elle est opposée à l'accélération centripète du point A ? D'accord. Or, si vous regardez ici la contribution qui est là et bien au chapeau et horizontalement, radialement orienté vers l'extérieur. D'accord. Ce qui le multiplie, c'est le produit d'une masse fois un terme qui est en valeur absolue, qui en norme, correspondrait à une accélération centripète. D'accord. Donc ça c'est vraiment la signature d'une force centrifuge. Alors vous allez me dire oui, mais la force centrifuge, elle va apporter quoi en plus ? Eh bien elle va apporter une contribution qui va ressembler à celle ci. Sauf que le rayon qu'on va considérer, ce n'est pas le rayon de la trajectoire du train par rapport au centre, ça va être la projection du film sur l'axe horizontal. D'accord. Alors, c'est ce qu'on va obtenir, c'est ce qu'on doit obtenir. Maintenant, vérifions ce qu'on obtient vraiment. On va faire comme ce matin. On va écrire que le vecteur vitesse angulaire ω , c'est une. C'est une composante $\omega \times z$ qui est orientée vers le bas. Le vecteur position relative, c'est $L \times r$ chapeau. Donc on met en évidence toutes les composantes. On aura donc $1 \times L \times \omega^2$. Ensuite, on a les vecteurs unitaires z chapeau pour ω . Produit vectoriel avec z . Chapeau pour le deuxième ω . Produit vectoriel avec R . Chapeau pour

notes

résumé

27m 13s



• Forces extérieures :

① Poids :

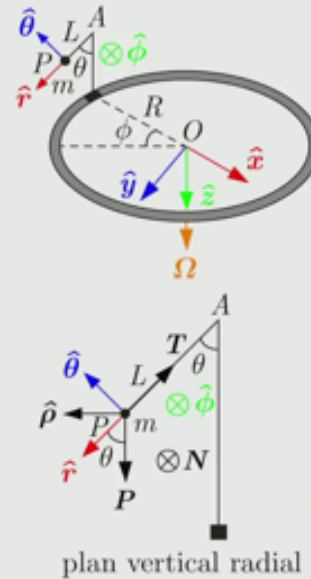
$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} (\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (\text{A.10.5})$$

② Force de réaction normale :

$$\mathbf{N} = N\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{A.10.6})$$

③ Tension :

$$\mathbf{T} = -T\hat{\mathbf{r}} \quad (\text{A.10.7})$$



la position relative. Ok, maintenant il faut exprimer $\mathbf{z}$ chapeau en coordonnées sphériques. Donc on va avoir moins $m\Omega^2 \mathbf{z}$ chapeau. Ce sera le cosinus de θ x $\mathbf{r}$ chapeau moins le sinus de θ x $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ Chapeau. On fait le produit vectoriel avec $\mathbf{z}$ chapeau qui est le même vecteur. Produit vectoriel donc avec $\mathbf{R}$ chapeau. Ce qu'on voit tout de suite, c'est que le terme radial ici dans l'expression de $\mathbf{z}$ chapeau, ne contribue pas au produit vectoriel. Le produit vectoriel entre chapeau et $\mathbf{r}$ chapeau, c'est le produit vectoriel entre le deuxième vecteur et le premier. Donc d'après la règle du logo Mercedes, c'est moins le précédent, c'est moins le troisième. Il y a un signe moins. On obtient donc Pour ces termes. Entre parenthèses, le sinus de θ fois $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ chapeau. Maintenant, il faut faire le produit vectoriel entre $\mathbf{R}$ chapeau et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ Chapeau. Entre θ chapeau et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ Chapeau. $\mathbf{R}$ Chapeau Produit vectoriel avec $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ Chapeau le premier avec le troisième. Vecteur unitaire, ça fait le précédent avec le signe moins c'est moins. Le deuxième se simplifie. Le produit vectoriel de θ chapeau avec $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ chapeau du deuxième. Avec le troisième, ça fait le suivant, ça fait chapeau. Il y a deux signes moins devant qui se compensent aussi. Tous les termes vont être positifs. Je vois que j'ai sauté une ligne. Bon, je vais le réécrire juste après. On trouve au final $M\Omega^2$ fois le sinus de θ qu'on a pu mettre en évidence, qui était ici d'accord fois k fois le sinus de θ . $\mathbf{R}$ Chapeau plus le cosinus de θ X $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ Chapeau. Je vais juste redévelopper la ligne précédente qui correspondra à ce que vous allez avoir sur les notes. Donc c'est moins L moins M , Ω^2 , le sinus θ qui est ici, on le met en évidence. D'accord. Et il va nous rester

notes

résumé

- Forces extérieures :

- Poids :

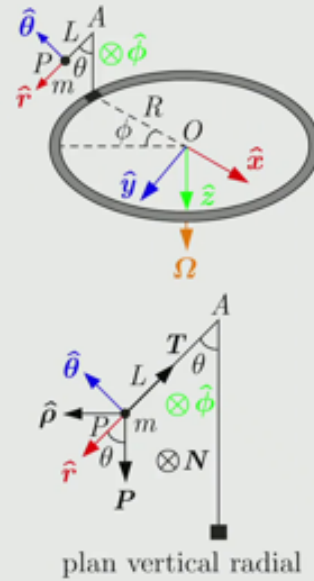
$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} (\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (A.10.5)$$

- Force de réaction normale :

$$\mathbf{N} = N\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (A.10.6)$$

- Tension :

$$\mathbf{T} = -T\hat{\mathbf{r}} \quad (A.10.7)$$



le produit vectoriel du cosinus de Thêta et chapeau moins le sinus de theta Tête à chapeau. Produit vectoriel donc avec phi chapeau. Si vous développez ceci, vous pouvez passer de là facilement à la ligne d'en dessous. Maintenant, si on fait un petit freeze ici et qu'on revient en arrière,

notes

résumé

- Forces d'inertie : $\dot{\Omega} = 0$

- ① Force inertielle :

$$F_i = -m a_a(A) = m R \Omega^2 \hat{\rho} = m R \Omega^2 (\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}) \quad (A.10.8)$$

- ② Force centrifuge :

$$\begin{aligned} F_c &= -m \Omega \times (\Omega \times r_r(P)) = -m L \Omega^2 \hat{z} \times (\hat{z} \times \hat{r}) \\ &= -m L \Omega^2 (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \times (\underbrace{(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \times \hat{r}}_{= \sin \theta \hat{\phi}}) \\ &= -m L \Omega^2 \sin \theta (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \times \hat{\phi} \\ &= m L \Omega^2 \sin \theta (\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}) = \end{aligned} \quad (A.10.9)$$

- ③ Force de Coriolis :

$$F_C = -2m \Omega \times v_r(P) = \quad (A.10.10)$$

ok, ce qu'on vient de trouver. Qui était le sinus de Thêta fois R Chapeau plus le cosinus de Thêta, fois thêta. Chapeau. Si on regarde le dessin, on a le sinus x r chapeau et le cosinus fois thêta. Chapeau. Ce qu'on a projeté, c'est en fait le vecteur Rho, chapeau ! Ok.

notes

résumé

31m 35s



- Forces d'inertie : $\dot{\Omega} = 0$

- Force inertielle :

$$F_i = -m a_a(A) = m R \Omega^2 \hat{\rho} = m R \Omega^2 (\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}) \quad (A.10.8)$$

- Force centrifuge :

$$\begin{aligned} F_c &= -m \Omega \times (\Omega \times r_r(P)) = -m L \Omega^2 \hat{z} \times (\hat{z} \times \hat{r}) \\ &= -m L \Omega^2 (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \times (\underbrace{(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \times \hat{r}}_{= \sin \theta \hat{\rho}}) \\ &= -m L \Omega^2 \sin \theta (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \times \hat{\rho} \\ &= m L \Omega^2 \sin \theta (\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}) = m L \Omega^2 \sin \theta \hat{\rho} \quad (A.10.9) \end{aligned}$$

- Force de Coriolis :

$$F_C = -2m \Omega \times v_r(P) = \quad (A.10.10)$$

Donc ceci C'est $m l \omega^2 \sin \theta$, foire aux chapeaux. Donc, si on compare cette force centrifuge à la force inertielle qui a un comportement de force centrifuge qu'on a trouvé précédemment, on voit qu'on a une contribution supplémentaire qui va faire apparaître la projection du fil du pendule sur l'axe horizontal. Et cette petite contribution va s'ajouter à une contribution beaucoup plus grande qui est due au mouvement de rotation du train sur les voies. D'ailleurs, la deuxième sera négligeable par rapport à la première. Bon, vous allez me dire pourquoi est ce qu'on l'a calculé ? Alors il fallait savoir qu'elle est négligeable. On s'aperçoit qu'il faut la calculer et comprendre ce qui se passe. Donc maintenant, pour calculer la force de Coriolis, on refait le même type d'exercice.

notes

résumé

31m 57s



A.10.8)

A.10.9)

A.10.10)

7 / 15



plan vertical radial

• Loi du mouvement relatif : (A.10.11)

• Equations du mouvement relatif :

selon $\hat{r}$:

(A

selon $\hat{\theta}$:

(A

selon $\hat{\phi}$:

(A

Dr. Sylvain Bréchet

A.10 - Système de masse variable et référentiels accélérés

On va mettre en évidence -2 m et les composantes de Oméga pour Oméga, c'est simplement Oméga. Pour la vitesse relative, ce sera donc elle est à point. Et puis ensuite, il faudra qu'on fasse le produit vectoriel du vecteur unitaire orienté vers le bas qui est Z chapeau qui donne l'orientation de oméga qui est le cosinus de thêta R chapeau moins le sinus de thêta x thêta chapeau dont on prend le produit vectoriel avec le vecteur unitaire le long de la vitesse relative. C'est un pendule. D'accord, c'est le long de la ligne de coordonnée nodal, donc c'est un état chapeau. Donc le terme nodal ici ne contribue pas au produit vectoriel produit vectoriel de R. Chapeau avec teta chapeau. C'est le produit vectoriel du premier avec le deuxième vecteur unitaire, ce qui donne le troisième défi chapeau. Donc on va se retrouver avec -2 m. Elle est à point oméga cosinus thêta là toutefois Phi Chapeau. Ok. Bon. Maintenant, on peut écrire la loi du mouvement relatif. Faisons le. La somme des forces extérieures. Plus la somme des forces d'inertie. C'est à dire le poids. Plus la force de réaction normale. Plus la tension. Plus la force inertielle. Plus la force centripète. Plus la force de Coriolis sont égale au produit de la masse. Fois l'accélération relative du point P. D'accord. Donc ce qu'il faut qu'on fasse maintenant, c'est qu'on prenne toutes ces grandeurs vectorielles qu'on vient de calculer, qu'on les substitue dans la loi du mouvement relatif et qu'on projette selon lignes de coordonnées relatives. Commençons par la ligne de coordonnées radiale. Pour le poids, on aura mg, cosinus thêta. Pour la tension, on a t. Il n'y a aucune contribution pour la force de réaction normale et la force inertielle se comporte comme une force centrifuge. On va pouvoir les traiter d'un bloc d'accord ? On écrira que globalement pour les deux, on a

notes

résumé

32m 49s



A.10.8)

A.10.9)

A.10.10)

7 / 15



plan vertical radial

• Loi du mouvement relatif : (A.10.11)

• Equations du mouvement relatif :

selon $\hat{r}$:

(A

selon $\hat{\theta}$:

(A

selon $\hat{\phi}$:

(A

Dr. Sylvain Brichet

A.10 - Système de masse variable et référentiels accélérés

m qui multiplie R plus l sinus θ la toutefois Ω^2 fois le sinus de θ . Et ceci est égal au produit de la masse fois l'accélération centripète du pendule dans le référentiel dans le plan orthogonal au mouvement du train, c'est à dire m l fois θ . Poincaré. C'est en ligne de coordonnées nodal. Pour le poids, on a mg sinus θ . Il n'y a aucune contribution de la tension. Il n'y a pas de contribution de la force de réaction normale. Pour les forces combinées inertielle et centrifuge, on va se retrouver avec M qui multiplie R plus l sinus θ la toutefois Ω^2 fois le cosinus θ et dans le membre de droite on aura le produit de la masse fois l'accélération tangentielle, soit elle a un point sur la ligne des coordonnées azimutales horizontale. Donc on aura d'une part une contribution de la force de réaction normale. Il n'y a pas de contribution du poids et de la tension qui sont dans un plan vertical. Il n'y aura pas non plus de contribution de la force inertielle et de la force centrifuge. En revanche, il y a une contribution de la force de Coriolis qui est moins $2ML \dot{\theta}$ point Ω cosinus θ . Et dans le membre de droite, on a identiquement zéro. Pourquoi ? Parce que le mouvement se fait à vitesse angulaire constante. Il n'y a donc pas d'accélération angulaire du train. D'accord. Donc on retombe sur des équations qui vont un peu ressembler à ce qu'on a vu ce matin. Elles seront légèrement différentes. Pour la tension, on a moins T fois R Chapeau. C'est à dire qu'on a moins M qui multiplie g cosinus θ plus L $\ddot{\theta}$ Poincaré plus R plus L sinus θ fois Ω^2 sinus θ la toute fois r chapeau. Ok. Donc la tension va venir compenser la composante radiale du poids pour ne laisser plus que

notes

résumé



plan vertical radial

• Loi du mouvement relatif : (A.10.11)

• Equations du mouvement relatif :

selon $\hat{r}$:

(A

selon $\hat{\theta}$:

(A

selon $\hat{\phi}$:

(A

la composante nodale. Elle va compenser dans le référentiel du pendule lui même la force centrifuge liée au à l'oscillation du pendule dans le plan de la porte. Elle va compenser aussi la force centrifuge liée à la rotation du train et du pendule par rapport au plan horizontal projeté le long de la ligne de corde. La projection, c'est le sinus de Thêta. D'accord. Ensuite, la force de réaction normale vient compenser la force de Coriolis et la force de Coriolis. Au signe près. C'est donc la force de réaction normale. Donc comme la force de Coriolis contient la force de Coriolis, elle contient un signe moins. D'accord, on aura sept, on aura cette expression analytique moins le signe moins qui est ici. D'accord. Donc on aura N qui est égal à deux. Elle est à point Oméga. Cosinus thêta x phi Chapeau. L'équation du mouvement, c'est celle le long du degré de liberté qui est la ligne de coordonnées nodale dans le référentiel du train. D'accord. Cette équation du mouvement, c'est la suivante téta point point plus g sur elle sinus thêta moins grand R sur grand L plus le sinus de thêta qui multiplie oméga carré fois le cosinus de Thêta qui est égale à zéro. C'est pas tout de suite clair que ça correspond à un mouvement harmonique oscillatoire. D'accord. Alors il y a une chose qu'on peut déjà faire, c'est trouver la position d'équilibre. D'accord. La position d'équilibre est celle pour laquelle l'accélération angulaire dans le plan d'oscillation est nulle. Donc l'étape un est égale à zéro et donc l'angle d'équilibre ça sera thêta égal à zéro pour lequel tu es à un point nulle. Et comme on a ici un sinus et là un cosinus, on peut diviser le sinus par le cosinus et trouver alors que la tangente de l'angle d'équilibre, la tangente de thêta zéro, eh bien ça va être, ça va

notes

résumé



• Loi du mouvement relatif : (A.10.11)

• Equations du mouvement relatif :

selon $\hat{r}$:

(A

selon $\hat{\theta}$:

(A

selon $\hat{\phi}$:

(A

être R plus $L \sin \theta$ zéro qui globalement multiplie Ω^2 divisé par g . Alors on peut faire une approximation qui va être très raisonnable. Le pendule, il fait quoi ? 30 cm de long ? Peut être 50 cm de long. En revanche, le rayon de courbure de la trajectoire du train, il est nettement plus grand. Ça peut être quelques kilomètres. D'accord. Et donc l'approximation est la suivante R est beaucoup plus grand que L . Et donc si on a R plus $L \sin \theta$ zéro. Le sinus étant borné supérieurement par un, inférieurement par -1. Ceci peut se réécrire comme R qui multiplie un plus le rapport de L sur R fois le sinus de θ qui clairement va être à peu près égal à R . Voilà l'approximation. D'accord. C'est à dire qu'on va négliger la projection de la longueur du pendule sur l'axe radiale d'oscillation. D'accord, c'est raisonnable. Mais alors la physique devient beaucoup plus transparente. Pourquoi ? Puisque la tangente de θ zéro maintenant, c'est quoi ? Dans cette limite, c'est $R \Omega^2$ divisé par G . C'est quoi $R \Omega^2$? C'est l'accélération du point A qui est une accélération centripète. D'accord. Donc ce qu'on a trouvé, c'est la norme de l'accélération absolue du point A divisé par G . Qu'est ce qu'on avait trouvé ce matin pour l'angle d'équilibre du pendule dans un train qui se déplace en ligne droite ? C'est le rapport de l'accélération du point A qui a divisé par G . D'accord, on a la même structure en rotation que celle qu'on avait en translation. D'accord. L'angle d'équilibre, il est donné ici vers l'extérieur parce que la force centrifuge est orientée vers l'extérieur, qu'on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre ou qu'on tourne dans le sens trigonométrique. Ça ne change rien si vous faites tourner le modèle réduit de train électrique, par exemple, avec un petit pendule

notes

résumé

A.10.8)

A.10.9)

A.10.10)

7 / 15



plan vertical radial

• Loi du mouvement relatif : (A.10.11)

• Equations du mouvement relatif :

selon $\hat{r}$:

(A

selon $\hat{\theta}$:

(A

selon $\hat{\phi}$:

(A

Dr. Sylvain Bréchet

A.10 - Système de masse variable et référentiels accélérés

dessus. Malheureusement, on n'en a pas à disposition ici. Si vous avez monté votre pendule, le fil va automatiquement être orienté vers l'extérieur. Plus vous allez faire tourner le modèle de train électrique rapidement sur les voies circulaires et bien plus. L'angle d'inclinaison va être important. D'accord. Alors compte tenu de ce résultat, on peut maintenant prendre l'équation du mouvement. On peut l'approximer dans la limite qu'on vient de mentionner, où le rayon de la trajectoire circulaire du train est plus grand que la longueur du fil, beaucoup plus grand que la longueur du fil. Donc on aura $\sin \theta \approx \theta$ et $\cos \theta \approx 1$. Et si on était en examen ? On ne va pas le faire là. Ce qu'on pourrait faire, c'est décrire le mouvement d'oscillation autour de la position d'équilibre qu'on vient de trouver. Compte tenu du fait que la position d'équilibre est petite. Donc si, si l'angle d'équilibre est petit, la tangente de l'angle, c'est à peu près l'angle. On trouverait pour l'angle le rapport de $r \Omega^2$ sur G . Et autour de cet angle d'équilibre, on pourrait décrire le mouvement de petites oscillations et trouver la pulsation et la période de ce mouvement d'oscillation autour de la position d'équilibre. On ne va pas le faire, mais ça serait un excellent exercice qui ressemble un petit peu à l'exercice qu'on avait fait lorsqu'on a déterminé le mouvement d'oscillation du matériel attaché à un ressort qui était fixé à la hauteur du centre d'un cercle disposé dans un plan horizontal. On va s'arrêter là. Je vous souhaite une excellente fin de journée, une bonne soirée et la semaine prochaine, vous allez voir dans cet auditoire la terre tourner sous vos yeux. On va démontrer la rotation de la Terre. Par rapport au drapeau.

notes

résumé